Le formalisme mathématique et la façon habituelle de le comprendre

Christian Wüthrich

http://www.wuthrich.net/

BA7 Introduction à la philosophie de la physique: mécanique quantique

Remerciements pour la traduction et des commentaires: Augustin Baas

Vecteurs et espaces vectoriels

Albert, *Quantum Mechanics and Experience*, Ch. 2

> *«En mécanique quantique, les vecteurs sont amenés à représenter des états de choses. Il se trouve que l'addition de vecteurs aura quelque chose à voir avec la superposition d'états physiques.» (20)*

Définition (Espace vectoriel)

Un espace vectoriel V sur un corps K (typiquement, $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$) est un ensemble d'éléments, appelés vecteurs, dans lequel deux opérations, l'addition et la multiplication par un élément de K (appelé un scalaire), sont définies suivant les axiomes suivants:

(i) $|A\rangle + |B\rangle = |B\rangle + |A\rangle$,

(ii) $(|A\rangle + |B\rangle) + |C\rangle = |A\rangle + (|B\rangle + |C\rangle)$,

(iii) *Il existe un vecteur nul* $|0\rangle$ *tel que* $|A\rangle + |0\rangle = |A\rangle$,

(iv) *Pour tout* $|A\rangle$, *il existe* $-|A\rangle$, *tel que* $|A\rangle + (-|A\rangle) = |0\rangle$,

(v) $c(|A\rangle + |B\rangle) = c|A\rangle + c|B\rangle$,

(vi) $(c + d)|A\rangle = c|A\rangle + d|A\rangle$,

(vii) $(cd)|A\rangle = c(d|A\rangle)$,

(viii) $1|A\rangle = |A\rangle$,

où $|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle \in V$ *et* $c, d \in K$ *et 1 est l'élément unité de* K.

Produit scalaire

Définition (Produit scalaire)

Le produit scalaire $\langle A|B\rangle$ *de deux vecteurs est défini par*

$$\langle A|B\rangle = |A||B|\cos\theta,$$

(un nombre) où θ *est l'angle entre les deux vecteurs et* $|A|$*, la longueur ou la norme de* $|A\rangle$*, est la racine carrée du nombre* $\langle A|A\rangle$*.*

- l'addition de deux vecteurs est un vecteur
- le produit d'un vecteur par un nombre est un vecteur
- le produit de deux vecteurs est un nombre (produit scalaire) ou un vecteur (produit vectoriel)

Définition (Orthogonalité)

Si $|A| \neq 0$ *et* $|B| \neq 0$ *mais* $\langle A|B\rangle = 0$*, alors* $|A\rangle$ *et* $|B\rangle$ *sont orthogonaux.*

(Rappel: $\cos 90^\circ = 0$)

Dimension et base

Définition (Dimension des espaces vectoriels)

La dimension d'un espace vectoriel est égale au nombre maximal N de vecteurs $|A_1\rangle, |A_2\rangle, ..., |A_N\rangle$ que l'on peut choisir dans l'espace tel que pour toute valeur de i et j allant de 1 à N tel que $i \neq j$, $\langle A_i|A_j\rangle = 0$. La dimension d'un espace vectoriel est égale au nombre de paires de vecteurs orthogonaux. (voir Albert, 21)

- Pour tout espace vectoriel de dimension ≥ 2, il y a une infinité d'ensembles de paires de vecteurs orthogonaux.
- Si tous les vecteurs éléments d'un tel ensemble sont de norme unité, on dit qu'ils forment une base orthonormée de l'espace vectoriel.
- Supposons que l'ensemble $|A_1\rangle, ..., |A_N\rangle$ forme une base de l'espace vectoriel V de dimension N. Alors tout vecteur $|B\rangle \in V$ peut être exprimé comme

$$|B\rangle = b_1|A_1\rangle + \cdots + b_N|A_N\rangle,$$

  où les coefficients de décomposition b_i sont les nombres $b_i = \langle B|A_i\rangle$.

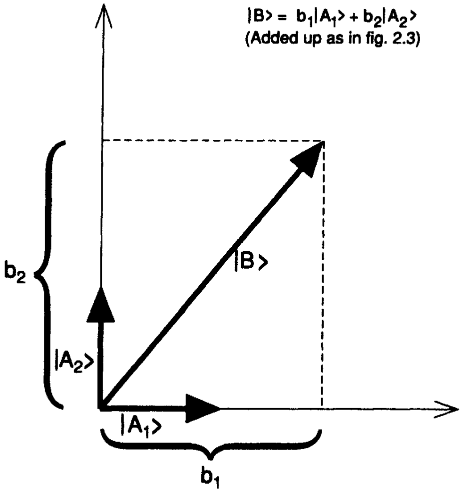


Figure: Figure 2.5 extraite de Albert (1992)

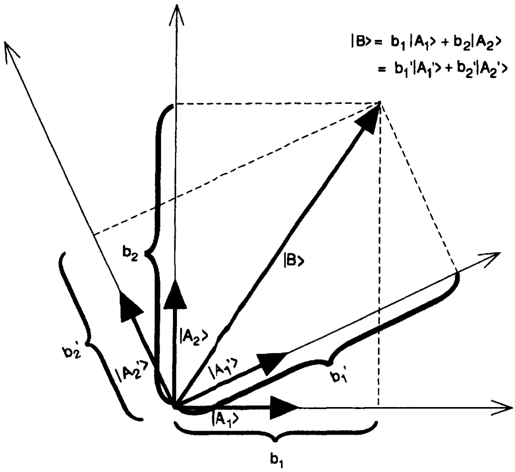


Figure: Figure 2.6 extraites Albert (1992)

Puisque

$$\langle A|(|B\rangle + |C\rangle) = \langle A|B\rangle + \langle A|C\rangle,$$

on trouve que

$$|X\rangle + |Y\rangle = (x_1 + y_1)|A_1\rangle + \cdots + (x_N + y_N)|A_N\rangle \tag{1}$$

et

$$\langle X|Y\rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_N y_N, \tag{2}$$

où x_i and y_i sont les coefficients de décomposition de $|X\rangle$ et $|Y\rangle$ respectivement dans une base donnée $|A_i\rangle$.

Notez que les coefficients dépendent de la base choisie, mais la somme $\langle X|Y\rangle$ elle n'en dépend pas. Autrement dit le produit scalaire est invariant par changement de base.

Dans une base donnée, un vecteur de dimension N avec les coefficients x_i dans cette base peut être représentée par une colone de N numbres:

$$|X\rangle = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}. \tag{3}$$

De (2) il suit que que la norme $|X|$ du vecteur $|X\rangle$ est donnée par

$$|X| = \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_N)^2},$$

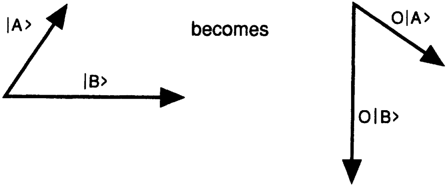
qui elle-aussi est invariante par changement de base.

Opérateurs

Définition (Opérateur)

Un opérator $\hat{O}$ défini sur un espace vectoriel V est une application $\hat{O}: V \to V, |A\rangle \mapsto |A'\rangle = \hat{O}|A\rangle$ où $|A\rangle, |A'\rangle \in V$, i.e., une règle qui à chaque vecteur dans V associe un autre vecteur dans V.

Quelques exemples: l'opérateur unité $\hat{1}$ transforme chaque vecteur en lui-même; «multiplie chaque vecteur par le nombre 7»; «effectue la rotation de chaque vecteur dans le sens horaire de 90° à partir d'un axe donné par $|C\rangle$» (représenté ci-dessous pour $|C\rangle$ pointant hors de la page); «associe à tout vecteur un vecteur particulier $|A\rangle$»; etc.



Définition (Opérateurs linéaires)

Un opérateur linéaire dans un espace vectoriel V est défini comme un opérateur avec les propriétés suivantes:

$$\hat{O}(|A\rangle + |B\rangle) = \hat{O}|A\rangle + \hat{O}|B\rangle \tag{4}$$

et

$$\hat{O}(c|A\rangle) = c(\hat{O}|A\rangle), \tag{5}$$

où $|A\rangle, |B\rangle \in V$ et c est un nombre.

- Question: Quels opérateurs parmi ceux proposés aux pages précédentes sont linéaires?
- Les opérateurs linéaires dans un espace vectoriel de dimension N peuvent être représentés par des tableaux contenant N^2 nombres appelés matrices. Un exemple d'opéateur défini dans un espace vectoriel de dimension 2 est:

$$\hat{O} = \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Les coefficients de la matrice O_{ij}—des nombres—sont définis par:

$$O_{ij} = \langle A_i|\hat{O}|A_j\rangle$$

dans la base $|A_1\rangle, ..., |A_N\rangle$.

Règle pour multiplier des matrices (représentants des opérateurs) avec des colonnes (représentants des vecteurs), illustré dans le cas bi-dimensionnel:

$$\begin{aligned}
\hat{O}|B\rangle &= \begin{bmatrix} O_{11} & O_{12} \\ O_{21} & O_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (O_{11}b_1 + O_{12}b_2) \\ (O_{21}b_1 + O_{22}b_2) \end{bmatrix} \\
&= (O_{11}b_1 + O_{12}b_2)|A_1\rangle + (O_{21}b_1 + O_{22}b_2)|A_2\rangle.
\end{aligned}$$

Vecteurs propres et valeurs propres

Définition (Vecteurs propres et valeurs propres)

Si un opérateur $\hat{O}$ et un vecteur $|X\rangle$ satisfont

$$\hat{O}|X\rangle = x|X\rangle$$

où x est un nombre, alors $|X\rangle$ est un vecteur propre de $\hat{O}$ avec la valeur propre x.

- En général, certains vecteurs seront vecteurs propres de certains opérateurs mais pas d'autres.
- En général, certains opérateurs admettent certains vecteurs, et pas d'autres, comme vecteurs propres.
- D'autres opérateurs vont avoir d'autres vecteurs comme vecteurs propres.
- La relation entre un opérateur et un de ses vecteurs propres dépend seulement du vecteur et de l'opérateur en question, mais pas de la base choisie.
- Regardez les exemples dans le chapitre d'Albert.

Mécanique quantique: les cinq principes

Principe (A: États physiques)

A chaque système physique, composé ou simple, est associé un espace vectoriel. Chaque vecteur unité de cet espace (les «vecteurs d'état») représente un état physique possible du système. Les états sélectionnés par ces vecteurs sont considérés compter tous les situations physiques possibles, bien que la correspondance ne soit pas biunivoque.

Principe (B: Observables)

Les propriétés mesurables des système physiques («observables») sont représentés par des opérateurs linéaires de l'espace vectoriel associé à ces systèmes physiques. La règle de connexion entre les opérateurs et les vecteurs est que si le vecteur s'avère être un vecteur propre (avec une valeur propre notée a) de l'opérateur en question, alors l'état correspondant à ce vecteur a la valeur a pour la propriété mesurable associée à l'opérateur.

Retour à l'exemple de la dureté et de la couleur

Soit un espace vectoriel dans lequel les états «être dur» et «être mou» sont peuvent être représentés par:

$$|\text{dur}\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\text{mou}\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

ce qui implique, à cause de (2), $\langle \text{hard}|\text{soft}\rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$. En fait, les deux vecteurs dans (7) forment une base de l'espace vectoriel. Par quel opérateur doit-on représenter l'observable «dureté»

$$\text{opérateur de dureté} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

avec la stipulation que $+1$ signifie «dur» et -1 «mou» (les vecteurs dans (7) sont les vecteurs propres de l'opérateur exprimé dans (8)).

Les états «noir» et «blanc» sont des «superpositions» des états «dur» et «mou», ce qui signifie, étant donné que les états de superposition sont des états dans le même espace vectoriel, que les états «blanc» et «noir» appartiennent au même espace vectoriel. Voici comment:

$$|\text{noir}\rangle = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad |\text{blanc}\rangle = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \tag{9}$$
$$\text{opérateur de couleur} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

où «couleur $= +1$» signifie «noir» et «couleur $= -1$» signifie «blanc». Ainsi, $\langle \text{noir}|\text{blanc}\rangle = 0$, et $|\text{noir}\rangle$ et $|\text{blanc}\rangle$ constitue une autre base du même espace.

On se rappelle (principalement à partir de (1)) que si $|A\rangle = (a_1, a_2)$ et $|B\rangle = (b_1, b_2)$ (nouvelles représentations des vecteurs colonnes), alors

$$|A\rangle + |B\rangle = \left[\begin{array}{c} (a_1 + b_1) \\ (a_2 + b_2) \end{array} \right].$$

De (7), (8), et (9) on peut voir comme la superposition et l'incompatibilité sont exprimés dans le formalisme:

$$\begin{aligned} |\text{noir}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{dur}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{mou}\rangle, \\ |\text{blanc}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{dur}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{mou}\rangle, \\ |\text{dur}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{noir}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{blanc}\rangle, \\ |\text{mou}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{noir}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{blanc}\rangle. \end{aligned} \tag{10}$$

Exercises laissés à l'attention du lecteur: montrez que $|\text{mou}\rangle$ et $|\text{dur}\rangle$ ne sont pas les vecteurs propres de l'opérateur couleur (et vice-versa, mutatis mutandis).

Les opérateurs de dureté et de couleur ne sont pas compatibles, dans le sens que aux états ayant une dureté définie on ne peut pas assigner une couleur, et vice versa.

Principe (C: Dynamique)

Étant donné l'état d'un système physique à n'importe quel temps «initial», et étant données les forces et les contraintes auxquelles le système est soumis, l'équation de Schrödinger donne une règle suivant laquelle l'état du système à tout autre instant est déterminé de façon unique. La dynamique du vecteur d'état est donc déterministe.

Les lois de la dynamique sont linéaires: si un état quelconque $|A\rangle$ à t_1 évolue vers un état $|A'\rangle$ à t_2 et un état quelconque $|B\rangle$ à t_1 évolue vers un état $|B'\rangle$ à t_2, alors $\alpha|A\rangle + \beta|B\rangle$ à t_1 évolue vers $\alpha|A'\rangle + \beta|B'\rangle$ à t_2.

Nous savons ce qui se passe lorsque nous mesurons une propriété d'un état qui est dans un état propre de l'opérateur correspondant à la propriété mesurée en question. Mais que se passe-t-il si ce n'est pas le cas?

Principe (D: Connexion avec l'expérience, «Règle de Born»)

Une mesure d'une observable $\hat{A}$ est faite sur un système dans un état $|b\rangle$, et les vecteurs propres de $\hat{A}$ sont $|a_i\rangle$ avec pour valeurs propres a_i, i.e. $\hat{A}|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$ pour tout i. La probabilité que le résultat de cette mesure est a_i est égale à

$$|\langle b|a_i\rangle|^2.$$

Remaqures:

- Le nombre $|\langle b|a_i\rangle|^2$ est compris dans l'intervalle $[0, 1]$.
- Dans le cas spécifique où le système est dans un état propre de l'opérateur correspondant à la mesure, on a une probabilité 1 (100%) que le résultat de la mesure est la valeur propre associée au vecteur propre.
- La probabilité de l'électron noir d'être mesuré «dur» est de 1/2, comme on s'y attend.

Principe (E: Effondrement («collapse» en anglais))

Quelque soit le vecteur d'état d'un système S juste avant la mesure d'un observable O, le vecteur d'état de S juste après la mesure doit être état propre de O avec une valeur propre correspondant au résultat de la mesure.

Remaques:

- Le vecteur d'état dans lequel le système se trouve à l'issue de la mesure est déterminée par la résultat de la mesure; et ce résultat, d'après le principe D, est affaire de probabilité.

$\Rightarrow$ Une part de hasard, d'indéterminisme, entre dans l'évolution du vecteur d'état.

Devoir à la maison: lisez attentivement comment tout cela est mis en oeuvre dans Albert pp. 36-38.

- Remarquez que le principe C était supposé rendre compte tous les aspects de l'évolution d'un vecteur d'état quelques soient les circonstances, or le principe E apparaît comme un cas spécial C, duquel il ne peut aisément être déduit...
- La mesure en MQ (du point de vue standard, appelé parfois «MQ orthodoxe») est un processus actif qui modifie l'état du système mesuré
- Albert: «C'est ce qui est au coeur de l'approche standard. Le reste... n'est que détails.» (38)

Espaces vectoriels complexes

MQ: dans les espaces vectoriels complexes, les vecteurs peuvent être multipliés par des nombres complexes.

$\Rightarrow$ les coefficients de décompositions sont aussi complexes

$\Rightarrow$ requiert quelques changements pour s'assurer que la norme des vecteurs est un nombre réel positif et que les probabilités sont des nombres réels positifs compris dans $[0, 1]$

- $|A\rangle$ et $c|A\rangle$ représentent le même état physique, où $c \in \mathbb{C}$ est un d'une infinité des nombres complexe de norme 1.

Définition (Opérateurs hermitiens)

A opérateur hermitien est un opérateur linéaire tel que tous ses vecteurs propres ont des valeurs propres réelles.

- Les opérateurs associés aux propriétés mesurables doivent être hermitiens.

Propriétés des opérateurs hermitiens

1. Si deux vecteurs sont tous les deux des vecteurs propres du même opérateur hermitien, et si les valeurs propres associées à ces deux vecteurs propres sont deux nombres différents, alors les deux vecteurs en question sont orthogonaux (sinon les mesures ne pourraient être répétables):

$$\hat{A}|a_1\rangle = a_1|a_1\rangle, \hat{A}|a_2\rangle = a_2|a_2\rangle, \text{with } \mathbb{R} \ni a_1 \neq a_2 \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \langle a_1|a_2\rangle = 0.$$

2. Tout opérateur hermitien dans un espace de dimension N devra toujours avoir au moins un ensemble de N vecteurs propres orthogonaux deux à deux.

$\Rightarrow$ Il est toujours possible de construire une base de l'espace à partir des vecteurs propres d'un opérateur hermitien.

3. Si un opérateur hermitien dans un espace de dimension N a N valeurs propres différents, alors il y a une vecteur unique dans cet espace associé à chacune de ces valeurs propres. On dit que ces opérateurs sont complets ou non-dégénérés.
4. Tout opérateur hermitien dans un espace donné sera immanquablement associé à une propriété mesurable du système physique en rapport avec cet espace.
5. Tout vecteur dans un espace donné est un vecteur propre d'un opérateur hermitien complet de cet espace.

$\Rightarrow$ Tout système quantique a une infinité de propriétés mesurables mutuellement incompatibles.

Définition (Commutateur)

Le commutateur de deux matrices A et B, noté $[A, B]$, est par définition $AB - BA$.

- Si $[A, B] = 0$, alors A et B partagent au moins un ensemble de vecteurs propres qui forment une base de l'espace.
- Autrement dit, les commutateurs de matrices d'observables incompatibles ne sont pas nuls.

$\Rightarrow$ La propriété de commutativité est un test mathématique utile pour tester la compatibilité.

Application: les coordonnées de l'espace

- Principe de correspondance: exigence que la «limite classique» soit la mécanique newtonienne
- Albert: l'exigence peut être «élargi» en la demande de construire la théorie quantique à partir d'une théorie classique tel que les opérateurs quantiques correspondent aux propriétés mesurables de la théorie classique

$\Rightarrow$ La quantité de mouvement et la position d'une particule sont incompatibles: $[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar$

- base pour les vecteurs propres de la position: $|x\rangle$, opérateur de position $\hat{X}$
- Remarque: les valeurs propres possibles forment un continuum de $-\infty$ à $+\infty$
- Les vecteurs propres de $\hat{X}$ forment une base de l'espace des états de la particule, mais il y une infinité de valeurs propres, et donc de vecteurs propres, et ces vecteurs propres sont orthogonaux deux à deux.

- Tout vecteur $|\Psi\rangle$ dans cet espace de dimension infinie peut être exprimé suivant sa décomposition sur les états propres $|x\rangle$, avec des coefficients de décomposition fonction de x

$$a_x = \langle\Psi|x\rangle = \Psi(x)$$

  De même que le vecteur dans (3) est entièrement déterminé par les N nombres dans la colonne, pour une base donnée, la fonction $\Psi(x)$ (une liste infinie) détermine le vecteur unique $|\Psi\rangle$ dans cet espace de dimension infinie (sous-entendu dans la base $\hat{X}$).

- Les probabilités peuvent aussi être lues comme les coefficients de décomposition: si la fonction d'onde est $\Psi(x)$ et la mesure une mesure de position, alors la probabilité que la particule se trouve à la position $x = x_1$ est donnée par $|\Psi(x_1)|^2$

Application: systèmes bipartites

- L'état d'un système bipartite constitué de la particule 1 dans l'état $|\Psi_a\rangle$ et de la particule 2 dans l'état $|\Psi_b\rangle$ est donné par $|\Psi_a\rangle_1|\Psi_b\rangle_2$ ou par $|^1\Psi_a,^2\Psi_b\rangle$.
- Si les deux particules n'interagissent pas, alors la probabilité commune que le résultat de la mesure $\hat{A}$ pour la particule 1 soit a et que le résultat de la mesure $\hat{B}$ pour la particule 2 soit b est le produit des probabilités de chacun des deux résultats de mesure.
- Règle pour la multiplication des vecteurs représentants des systèmes biparties:
$$\langle^1\Psi_i,^2\Psi_j|^1\Psi_k,^2\Psi_l\rangle = \langle^1\Psi_i|^1\Psi_k\rangle \cdot \langle^2\Psi_j|^2\Psi_l\rangle$$
($= 0$ à moins que $i = k$ et $j = l$).
- La dimension de l'espace des états de deux particules est le produit des dimensions des espaces des états de chacune des particules individuelles (par exemple N^2 si les deux espaces des états des particules uniques ont une dimension N, avec N^2 vecteurs orthogonaux $|^1\Psi_i,^2\Psi_j\rangle$ comme base pour l'espace des états bipartites).

États non-séparables

$$|Q\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|^1\Psi_1,^2\Psi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|^1\Psi_2,^2\Psi_2\rangle \tag{11}$$

est un état non-séparable ou intriqué car il ne peut pas être réécrit sour la forme $|^1f,^2g\rangle$, autrement dit il ne peut pas être décomposé dans un état bien défini pour la particule 1 et un état bien défini pour la particule 2.

Exemple:

$$|Q'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|^1\hat{X} = 5,^2\hat{X} = 7\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|^1\hat{X} = 9,^2\hat{X} = 11\rangle$$

Rien de ce qui concerne les deux particules individuellement n'a de valeur définie ici, au contraire de la différence de leurs positions:

$$(^2\hat{X} -^1\hat{X})|Q'\rangle = 2|Q'\rangle.$$

Devoir à la maison: étudiez comment les principes D et E s'appliquent au cas d'un système bipartite en général

Exemples d'effondrement pour des systèmes bipartites
États séparables

États séparables: la mesure n'affecte que l'état de la particule mesurée; exemple: l'état avant la mesure est

$$|S\rangle = |^1\hat{M} = m, ^2\hat{N} = n\rangle$$

et ainsi $^1\hat{A}$ est mesuré, avec le résultat a_7. Quel est l'état après la mesure? Décomposez $|S\rangle$ dans la base des états propres de $^1\hat{A}$ et $^2\hat{N}$ et effacez tous les termes avec $^2\hat{N} \neq n$:

$$|S\rangle = s_1|^1\hat{A} = a_1, ^2\hat{N} = n\rangle + s_2|^1\hat{A} = a_2, ^2\hat{N} = n\rangle + \dots$$

avec

$$s_i = \langle ^1\hat{A} = a_i, ^2\hat{N} = n|^1\hat{M} = m, ^2\hat{N} = n\rangle = \langle ^1\hat{A} = a_i|^1\hat{M} = m\rangle.$$

État après la mesure:

$$|S'\rangle = |^1\hat{A} = a_7, ^2\hat{N} = n\rangle.$$

Exemples d'effondrement pour des systèmes bipartites

États non-séparables

États non-séparables: la mesure apporte aussi des changements dans l'état de la particule non mesurée; exemple: l'état avant la mesure est

$$|NS\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|^1\hat{A} = a_4, ^2\hat{K} = k_9\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|^1\hat{A} = a_5, ^2\hat{K} = k_{17}\rangle$$

où, comme avant, $^1\hat{A}$ est mesuré, avec le résultat a_5. La formule ci-dessous est déjà exprimée à partir des états propres de $^1\hat{A}$ et$^2\hat{K}$, donc on peut directement enlever tous les termes autre que ceux pour lesquels $^1\hat{A} = a_5$. On obtient:

$$|NS'\rangle = |^1\hat{A} = a_5, ^2\hat{K} = k_{17}\rangle.$$

Degrés de liberté

- Les système bipartites sont importants car aucun système ayant de multiple degrés de liberté est décrit de manière analogue en MQ.
- Les degrés de liberté (DL): se déplacer dans une direction spatiale, se déplacer dans une autre direction spatiale, avoir des propriétés couleur-dureté, etc.
- Théorie quantique des champs (Quantum Field Theory (QFT)): les principles A-D sont toujours valides, mais l'ontologie de particules fait place à une ontologie de champs, qui conçoit le monde comme fait des réseaux infinis des systèmes physiques infiniment petits à tous les points de l'espace, interagissant les uns avec les autres de diverses manières.

$\Rightarrow$ une infinité de DL

Application: expérience à deux chemins

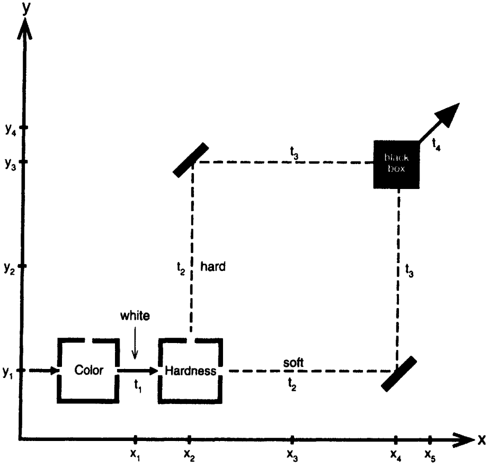


Figure: L'expérience à deux chemins revisitée par Albert (Albert, Fig. 2.8)

À t_1, avant d'entrer dans la boîte de dureté, l'état de l'électron est

$$
\begin{aligned}
|\text{blanc}, \hat{X} = x_1, \hat{Y} = y_1\rangle &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} |\hat{X} = x_1, \hat{Y} = y_1\rangle \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) |\hat{X} = x_1, \hat{Y} = y_1\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{dur}, \hat{X} = x_1, \hat{Y} = y_1\rangle \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} |\text{mou}, \hat{X} = x_1, \hat{Y} = y_1\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} |a\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |b\rangle.
\end{aligned}
$$

Que se passe-t-il si l'état à t_1 a été seulement un des termes (normalisés) (et la boîte de dureté est toujours une boîte de dureté)?

Si à t_1 c'était $|a\rangle$, alors à t_2, ça aurait simplement été $|\text{dur}, \hat{X} = x_2, \hat{Y} = y_2\rangle$. Si ça avait été $|b\rangle$ à t_1, alors ça aurait été simplement $|\text{mou}, \hat{X} = x_3, \hat{Y} = y_1\rangle$ à t_2.

De cela et de la linéarité de la dynamique (principe D) il suit que l'état à t_2 est réellement

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\text{dur}, \hat{X} = x_2, \hat{Y} = y_2\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{mou}, \hat{X} = x_3, \hat{Y} = y_1\rangle$$

Mais nous savons à présent qu'on ne peut plus factoriser les propriétés de position et de spin de l'état propre, ce qui signifie que ce dernier est non-séparable, i.e. il y a des corrélations entre les propriétés de spin et de coordonnées de l'espace de e^-. Cela signifie qu'aucune propriété de spin, ni de coordonnées de l'espace, a une valeur définie ici. Les propriétés définies à t_2 sont forcément des combinaisons des variables de spin-espace et de coordonnées-espace. Selon le point de vue standard, cela n'a aucun sens de parler des propriétés du spin ou des coordonnées de l'espace de l'e^- au temps t_2.

De façon similaire, l'état de l'e$^-$ à t_3 est

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{dur}, \hat{X} = x_3, \hat{Y} = y_3\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{mou}, \hat{X} = x_4, \hat{Y} = y_2\rangle$$

et à t_4, il est

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{dur}, \quad \hat{X} = x_5, \quad \hat{Y} = y_4\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\mathrm{mou}, \hat{X} = x_5, \hat{Y} = y_4\rangle \\ = \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{dur}\rangle - |\mathrm{mou}\rangle)|\hat{X} = x_5, \hat{Y} = y_4\rangle \\ = \quad |\mathrm{blanc}, \hat{X} = x_5, \hat{Y} = y_4\rangle.\end{aligned}$$

Cet état à nouveau est un état séparable, il a des propriétés définies de position et de spin (ici: la couleur).

Supposons à présent que l'expérience était s'achève à t_3 par la mesure de la position de l'électron. Alors un effondrement a lieu, et l'état juste après la mesure serait

$$|\text{dur}, \hat{X} = x_3, \hat{Y} = y_3\rangle \text{ or } |\text{mou}, \hat{X} = x_4, \hat{Y} = y_2\rangle$$

chacun avec une probabilité 0.5. Si la mesure était faite à t_4, alors l'état serait

$$|\text{dur}, \hat{X} = x_5, \hat{Y} = y_4\rangle \text{ or } |\text{mou}, \hat{X} = x_5, \hat{Y} = y_4\rangle.$$

Que se passerait-il si on obstruait le chemin mou à (x_3, y_1)? Alors l'état à t_4 serait

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|\text{dur}, \hat{X} = x_5, \hat{Y} = y_4\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\text{mou}, \hat{X} = x_3, \hat{Y} = y_1\rangle.$$

- Autrement dit, l'état resterait un état intriqué entre spin et coordonnées de l'espace même à t_4.
- Si une mesure de position était faite à t_4, l'e$^-$ serait trouvé à (x_5, y_4) avec une probabilité 0.5 (il serait alors dur), ou à (x_3, y_1) avec une probabilité 0.5 (il serait alors mou).
- Mais c'est un état de la MQ, donc un vecteur dans l'espace des états de cet e$^-$. Selon le fait (5) au sujet des opérateurs hermitiens, il est donc un état propres d'un opérateur, i.e. il doit être associées à quelques valeurs définies de propriétés mesurables.
- Pour savoir ce que seraient ces propriétés, on vous renvoit à l'introduction d'Albert sur les opérateurs «where» et «zap» (pp. 57f)