

# Théorème de Bell et non-localité

Christian Wüthrich

<http://www.wuthrich.net/>

**BA7 Introduction à la philosophie de la physique: mécanique quantique**

Remerciements pour la traduction et des commentaires: Augustin Baas

# Après EPR

- Rappel: EPR a tenté d'argumenter en faveur de l'incomplétude de la MQ
- ⇒ Idée qu'il existe une "réalité cachée" derrière ce qui est capturé par la description quantique
- ⇒ **David Bohm (1917-1992)** formula au début des années 1950 une théorie à variables cachées (VC) non-locales empiriquement équivalente à la MQ
- Dans ce travail, Bohm développa l'expérience de pensée EPR
- ⇒ suscita l'intérêt de **John S Bell (1928-1990)**

# John Stewart Bell (1928-1990)



- étudia la physique à l'université Queen's de Belfast, PhD U Birmingham, CERN
- 'On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox' (1964): derivation des **inégalités de Bell**
- **Théorème de Bell**: cette inégalité, dérivée à partir d'hypothèses simples de localité et de séparabilité, entre en conflits avec les prédictions de la MQ
- 'On the problem of hidden variables in quantum mechanics' (1966): l'argument de von Neumann contre la possibilité de théories à VC ne l'emporta pas, de même les arguments soutenus par le théorème de Gleason

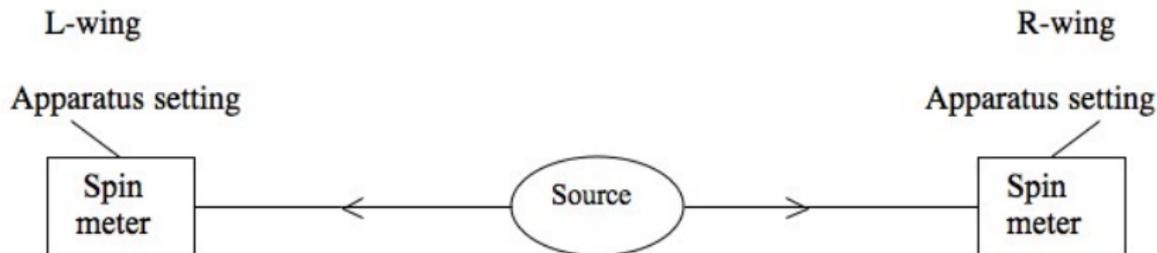
# L'importance de Bell



N. David Mermin, 'Is the moon there when nobody looks? Reality and the quantum theory', *Physics Today*, April 1985, 38-47.

- Au milieu des années 60, la plupart des physiciens travaillait avec la MQ, sans s'intéresser ni réfléchir à ses fondements.
- ⇒ la plupart d'entre eux ne remarquait pas l'importance du théorème de Bell
- Mais pas tous: "Le théorème de Bell est la découverte la plus importance de la science" (Henry Stapp)
- Un peu plus nuancé (mais à peine): "Quiconque n'est pas dérangé par le théorème de Bell n'est pas futé" ("un physicien éminent de Princeton")
- Classification de Mermin des physiciens:
  - Type 1 est dérangé par EPR et le théorème de Bell, type 2 (la majorité) n'est pas dérangé
  - Type 2a explique sa position, mais soit passe complètement à côté de l'essentiel soit avance des propositions que l'on prouve être fausses
  - Type 2b refuse d'expliquer pourquoi il n'est pas dérangé

## Version de Mermin de l'expérience de pensée EPR-Bohm



- Trois objets: deux détecteurs (A and B) et une source (C)
- Chaque détecteur a un commutateur avec trois réglages (1, 2, 3) et répond à un évènement en émettant un flash rouge (R) ou vert (V)
- Pas de connexions entre les objets  $\Rightarrow$  pas de signaux autres que les particules
- Le commutateur de chaque détecteur est **indépendant** et réglé de façon **aléatoire** sur une des position; le bouton est enfoncé à la source pour initié le processus de création des paires et les envoyés dans des chemins opposés

- l'expérience est répétée plusieurs fois, des données de la forme (11VV, 23VR, etc) sont collectées
- Remarque: comme il n'y a pas de connexions entre les parties de l'appel, la seule chose qui voyage entre elles sont les particules (ce qui peut être testé par des parois amovibles, etc.)

Les données ont deux aspects:

- 1 Pour les séries d'expérience dans lesquelles **les réglages sont les mêmes en A et B**, on trouve que les flashes sont toujours de la même couleur. (CORRÉLATION PARFAITE)
- 2 Pour **toutes les expériences, quelques soient les réglages en A et B**, les couleurs des flashes apparaissent complètement aléatoires. En particulier, la moitié du temps les couleurs sont les mêmes, la moitié du temps les couleurs sont différentes. (PAS DE CORRÉLATION)

Le défi est d'expliquer ces deux aspects.

# Comment expliquer ces données?

- La corrélation parfaite réclame une explication.
- Possibilités habituelles: (i) les évènements font réellement parties d'un évènement plus grand, ou (ii) A cause B ou vice-versa, ou (iii) ils ont une cause commune.
- Si les détecteurs pouvaient communiquer, ce serait facile. Mais ce n'est pas le cas. Et ce ne peut pas l'être.
- Aucun des détecteurs n'a été programmé pour émettre un flash toujours de la même couleur, puisqu'il faut aussi rendre compte des données du point 2, et là les réglages sont **aléatoires** et **indépendants**.
- Born offre une explication (dans une lettre à Einstein datée de mai 1948): "des objets à grande distance qui ont une origine commune n'ont pas besoin d'être indépendants... Dirac a écrit tout son livre sur cette base."
- Mermin rend cela plus concrètement sur les p. 43f; allons voir.

# Une explication en termes de variable cachée locale

- Une **explication par la cause commune**: lorsqu'elles quittent la source, on a transmis aux deux particules le même triplet (trois bits d'information, par ex. RRV, VRV, etc;  $2^3$  possibilités), chacune disant au détecteur la couleur du flash, en fonction des réglages.
  - Mermin imagine une autre possibilité: les particules arrivent de huit façon différentes (cubes, sphères, tétraèdres, etc), mais c'est essentiellement la même idée: chaque particule porte un ensemble d'instructions sur la couleur du flash pour **chacun** des trois réglages, de manière telle qu'à chaque expérience l'ensemble d'instructions soit le même.
  - Les instructions doivent couvrir **chacun** des réglages possibles des détecteurs car il n'y a pas de communication entre la source et les détecteurs en dehors des particules.
  - Cela signifie aussi que les instructions doivent être portées dans **chaque** expérience, puisqu'on ne peut jamais savoir au départ si les réglages seront les mêmes.
- ⇒ permet de rendre compte facilement des données 1

- Cependant, malgré le naturel de ce type d'explication (sans doute la seule explication naturelle), elle ne peut pas être vraie: elle est contradictoire avec les données 2!
- Remarquez que « nous sommes sur le point de montrer que “quelque chose sur laquelle on ne peut rien savoir” — la troisième entrée dans l'ensemble d'instruction – ne peut pas exister. » (43) (On ne peut jamais connaître plus que deux des entrées des ensembles d'instructions transmis aux particules.)
- Montrons la contradiction avec les données 2. Considérons un ensemble d'instruction possible, par ex. RRV.
- ⇒ Les détecteurs flasheront la même couleur pour les réglages 11, 22, 33, 12, 21, et des couleurs différentes pour les réglages 13, 31, 23, 32 ( $3^2$  réglages).
- Puisque les réglages sont aléatoires et indépendants, les 9 possibilités sont équiprobables.
- ⇒ L'ensemble d'instructions RRV donnera la même couleur des flashes 5/9 du temps.

- Il en est évidemment de même pour les ensembles d'instructions RVR, VRR, VVR, VRV et RVV (car l'argument ne repose que sur le fait qu'une couleur apparaît deux fois, et l'autre une seule fois).
- Deux ensembles d'instructions restent à considérer: RRR et VVV, mais les deux donnent les mêmes couleurs de flashes tout le temps (avec une probabilité 1). Mais cela implique le fameux:

### Theorem (Théorème de Bell (version bébé))

*Si les ensembles d'instructions existent, alors on aura des flashes de même couleur **dans au moins 5/9** des expériences, quelque soit la manière dont sont distribués les ensembles d'instructions dans les expériences.*

- C'est l'**inégalité de Bell (version bébé)**: la possibilité que les mêmes couleurs flashent est plus grand ou égale à 5/9.
- Il est à présent évident qu'on ne peut rendre compte des données 2: les données 2 violent l'inégalité de Bell!

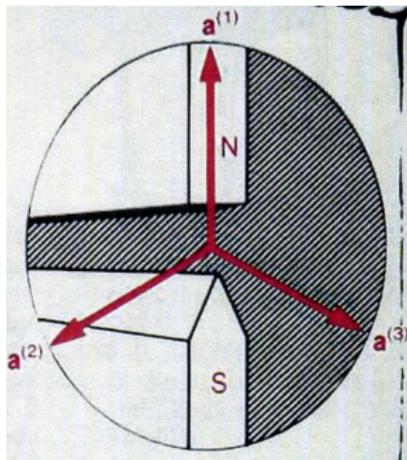
⇒ Il ne peut pas y avoir d'explication par des variables cachées locales.

# L'explication standard de la MQ

- Supposons que la source produise une paire de particules de spin 1/2 dans un état singlet:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (1)$$

- Chaque détecteur contient un aimant de Stern-Gerlach orienté selon une des trois directions  $a^1, a^2, a^3$  perpendiculaire à l'axe de la lumière, chacun à  $120^\circ$  des deux autres:



- La lumière du détecteur A flashe R si la particule est orientée selon le Nord (spin  $\uparrow$ ) et V si elle est orientée selon le Sud (spin  $\downarrow$ ), le détecteur B utilise des conventions de couleur **opposées**.
- Cela nous permet de rendre compte des données.
- Les données 1 sont expliquées par la structure de l'état singlet qui assure que les mesures le long du même axe ont des spins opposés donc la même couleur.
- Pour obtenir les données 2, nous avons besoin du concept d'**espérance mathématique** (ou espérance).

### Définition (Espérance)

*L'espérance d'une observable pour un état est la valeur moyenne des valeurs mesurées de cette observable pour cet état pour un très grand nombre de mesures. Plus précisément, étant donné un operator hermitien  $\hat{A}$  défini dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , the **espérance** de  $\hat{A}$  dans l'état  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  est définie comme  $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ .*

- Remarquez que pour le produit  $m_1 m_2$  des deux mesures de spin (chacun est soit  $+1/2$  soit  $-1/2$ ), on obtiendra  $-1/4$  quand les flashes ont la même couleur et  $+1/4$  sinon.
- **À montrer:** le produit  $m_1 m_2$  s'annule on moyenne sur les neuf paires distinctes possibles d'orientation des deux aimants de Stern-Gerlach.
- Pour une paire donnée d'orientations  $a^i$  and  $a^j$ , la valeur de  $m_1 m_2$  est simplement l'espérance dans l'état  $|\psi\rangle$  du produit correspondant des opérateurs (hermitiens) commutatifs  $a^i \cdot S^1$  et  $a^j \cdot S^2$ .

⇒ Les données 2 imposent donc que:

$$\sum_{i,j=1}^3 \langle \psi | [a^i \cdot S^1] [a^j \cdot S^2] | \psi \rangle = 0 \quad (2)$$

- La linéarité de  $\mathcal{H}$  (cf. Topic 2, p. 11, équation (4)) et le fait que nous utilisons uniquement des opérateurs linéaires (ibid., p. 11) nous donne

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j=1}^3 \langle \psi | [a^i \cdot S^1] [a^j \cdot S^2] | \psi \rangle &= \langle \psi | \sum_{i,j=1}^3 [a^i \cdot S^1] [a^j \cdot S^2] | \psi \rangle \\
 &= \langle \psi | \sum_i [a^i \cdot S^1] \sum_j [a^j \cdot S^2] | \psi \rangle \\
 &= \langle \psi | [(\sum_i a^i) \cdot S^1] [(\sum_j a^j) \cdot S^2] | \psi \rangle
 \end{aligned}$$

Mais nous savons que  $\sum_i a^i = \sum_j a^j = 0$ , puisque la somme des trois vecteurs unitaires d'un triangle équilatéral s'annule.  $\square$

# Commentaires

- Une expérience de pensée simplifiée rend compte exactement des caractéristiques importantes de l'expérience de EPR-Bohm, mais elle introduit des expériences dans lesquelles les orientations dans les deux bras ne sont pas alignées.
  - Le théorème de Bell version bébé montre pourquoi il ne peut pas y avoir de variables cachées locales, contrairement à l'argument EPR qui défendait que la MQ était incomplète.
  - Bell fut celui qui ajouta des expériences avec des réglages différents dans le but de formuler des prédictions, à partir de la MQ, pour les données 2.
  - Ce furent précisément les données 2 qui montrèrent qu'un compte rendu en termes de VC locales est incompatible avec les prédictions de la MQ.
  - **Alain Aspect**, Paris 1982; **Nicolas Gisin**, Genève 1997: les détecteurs sont séparés de 10 km (18km en 2008), les réglages sont choisis **après** que les photons sont émis par la source
- ⇒ falsification expérimentale d'une théorie à VC locales

# Analyse de Bell de son résultat



J.S. Bell, 'Bertlmann's socks and the nature of reality', dans *Speakable and Unsayable in QM*, 139-158.

Bell envisage au moins quatre positions différentes que l'on pourrait adopter vis-à-vis de EPRB:

- 1 La MQ est fautive dans des situations suffisamment critiques. Mais à la lumière des évidences expérimentales, cela est peu convaincant.
- 2 Les réglages des détecteurs ne sont pas des variables indépendantes. Mais cela impliquerait soit un complot étrange entre des appareils spatialement distants, soit que notre libre arbitre est dans une intrication conspiratrice avec eux, soit les deux.
- 3 Les influences causales peuvent aller plus vite que la lumière, peut-être en réintroduisant l'éther. Mais cela amènerait à des défis redoutables...
- 4 Peut-être il n'y a pas de réalité au-delà d'un niveau 'macroscopique' 'classique'.

# Une analyse plus approfondie des hypothèses du théorème de Bell



G. Grasshoff, S. Portmann, A. Wüthrich, *British Journal for the Philosophy of Science* 56 (2005): 663-680.

- Il y a plusieurs ensembles non-équivalents d'hypothèses qui sont suffisant pour dériver des inégalités de type Bell, qui sont violées par la MQ et par l'expérience.
- La situation dialectique: essayer de dériver l'inégalité de Bell d'un ensemble d'hypothèses aussi faibles que possible; puisque nous savons que l'inégalité de Bell est violée, nous savons qu'au moins une des prémisses est fausse.
- Mais laquelle?!?
- Habituellement, excepté un ensemble d'hypothèses auxiliaires et d'hypothèses qui viennent directement de la MQ, ce que l'on appelle la **localité de Bell** est supposée.

# Résultat

Ainsi la localité de Bell doit être violée. Cependant, puisque l'hypothèse de la localité de Bell peut être incluse dans plusieurs hypothèses plus faibles, il y a diverses manières de la violer:

- Les événements de mesure dans les deux bras ne sont pas séparés.
- Un des événements de mesure cause instantanément l'autre.
- Il n'y a pas de causes communes à la source.
- Les réglages dans chaque bras ont une influence causale sur la mesure dans l'autre bras.
- Il y a une action causale rétroactive telle que les réglages dans aucun ou dans les deux bras (qui peut être réglé après que les particules aient été émises) influencent causalement la cause commune de l'événement de leur production.

Remarque: l'un doit être vrai.

# Considérations supplémentaires sur la non-localité



Albert, *Quantum Mechanics and Experience*, Ch. 3.

- EPR pensait que le caractère non-local des mesures d'états non-séparables peut davantage être vu comme un artéfact non essentiel du formalisme particulier de la MQ standard.
- Le résultat du théorème de Bell est que l'on peut **démontrer que c'est faux**:

*"What Bell has given us is a proof that there is as a matter of fact a genuine nonlocality in the actual workings of nature, **however** we attempt to describe it, period. That nonlocality is... necessarily... a feature of every possible manner of calculating... which produces the same statistical predictions as quantum mechanics does; and those predictions are now experimentally known to be correct."* (70)

# La non-localité est subtile

- Étant donné l'état non-séparable  $|\psi\rangle$ , les statistiques des résultats de mesure de spin d'un électron dans le bras  $L$  dépendent non-localement des résultats de mesure de spin d'un électron dans le bras  $R$ , et vice-versa.
- Mais, étant donné  $|\psi\rangle$ , est-ce que les statistiques des résultats de mesure de spin d'un électron  $L$  dépendent non-localement du fait **si ou non** une mesure de spin soit effectuée sur l'électron  $R$ , et vice-versa?
- Étant donné  $|\psi\rangle$ , le résultat de mesure de la couleur de l'électron  $L$  a autant de chance d'être «blanc» que «noir», que la mesure de la couleur de l'électron  $R$  ait été précédemment **faite ou non**. (Pourquoi?)
- En fait, puisque  $|\psi\rangle = 1/\sqrt{2}(|^1\text{dur}, ^2\text{mou}\rangle - |^1\text{mou}, ^2\text{dur}\rangle)$ , le résultat de la mesure de couleur de l'électron  $L$  a autant de chance d'être «blanc» que «noir», que la mesure de la **dureté** sur l'électron  $R$  soit effectuée ou non. (Pourquoi?)

En fait, nous avons le résultat général suivant:

### Theorem

*Pour tout état  $|Q\rangle$  d'un système quantique  $S$  constitué de deux sous-systèmes  $s_1$  et  $s_2$ , pour tout observable  $\hat{A}$  de  $s_1$  et pour tout observable  $\hat{B}$  de  $s_2$ , les probabilités des résultats de mesure possible de  $\hat{A}$  ne dépendent pas du fait qu'une mesure de  $\hat{B}$  ait ou non été effectuée.*  
(72)

- Les résultats de mesure dépendent parfois de façon non-locale de résultats de mesures (distantes), mais ils ne dépendent pas de façon non-locale du fait que d'autres mesures (distantes) ait ou non été effectuées.
- ⇒ La non-localité ne peut pas être utilisée pour transmettre des signaux détectables entre des positions spatialement séparées.

# Trois commentaires finaux



Tim Maudlin, *Quantum Non-Localität and Relativity*, Ch. 1.

Je ne vais pas parcourir tout le chapitre, car il reprend en bonne partie ce qui a été dit ici. Mais je vous recommande fortement de jeter un oeil à l'expérience de pensée de la section 'How do they do it?'

Trois résultats concernant la «connexion quantique»:

- 1 Elle ne **s'atténue pas**: contrairement à l'action classique (instantanée), la connexion n'est pas affectée par la distance.
- 2 Elle est **particulière**: alors que la force gravitationnelle affectent de la même manière des objets positionnés d'une manière similaire, la connexion quantique est un arrangement privé entre particules intriquées.
- 3 Elle est **instantanée**: même si dans la théorie de la gravitation de Newton la gravité se propage instantanément, ce n'est pas nécessaire, et la relativité générale ne suppose assurément pas d'action gravitationnelle instantanée; mais la connexion quantique apparaît agir essentiellement instantanément.